

离散栅格 Gabor 小波变换的尺度参数取值方法

翁嘉文¹⁾ 钟金钢²⁾

¹⁾(华南农业大学理学院, 广州 510642) ²⁾(暨南大学物理系, 广州 510632)

摘要 在工程分析中应用离散化的小波变换, 通常是在尺度方向上按以 2 为底的幂级数对尺度参数 a 进行离散化来得到离散栅格下的小波变换, 但实际分析时则往往需要加大尺度方向的栅格密度, 以获得细致的分析, 而现行的增加密度的方法都具有一定的任意性, 为了解决实际工程应用中离散栅格小波变换分析尺度增加密度的不确定性问题, 根据小波基在空/时-频平面上的能量分布特性, 通过理论推导计算验证, 提出了小波变换分析尺度参数取值的理论方法以及尺度参数 a 的离散化理论取值公式 $a = 1.15^n a_0$, 同时以 3 维形貌测量轮廓术为基础, 以 Gabor 解析小波的尺度参数取值为例展开了讨论计算, 并给出了 Gabor 解析小波尺度参数选取的理论公式。从计算机模拟和实验结果可见, 该方法根据中心频率对尺度参数 a 进行取值, 能够较好地解决各尺度小波之间的频谱拉距以及混叠现象所造成测量误差。

关键词 小波变换 离散栅格 尺度 Gabor 解析小波

中图法分类号: O438 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2006)09-1266-05

Scale Value Decision Method for Discrete Grid Gabor Wavelet Transform

WENG Jia-wen¹⁾, ZHONG Jin-gang²⁾

¹⁾ College of Science, South China Agricultural University, Guangzhou 510642)

²⁾ Department of Physics, Jinan University, Guangzhou 510632)

Abstract Discrete grid wavelet transform has wide application in the engineering analysis. The way to decide the value of the scale factor widely used in present is to set the scale factor a as $a = a_0^n$ ($a_0 = 2, n = 0, 1, \dots, N$). But for the actual applications, it is too rough for analysis. Therefore, people should reduce the scale factor interval to increase the density of the discrete grids of the wavelet transform. However existing ways to increase the density of the discrete grids have somewhat of randomness. Through the research in the wavelet transform profilometry, Weng Jiawen and Zhong Jingang proposed another new approach to the analysis of the values of the scale factor in the light of the energy characteristic of the wavelets. In this paper, they took the Gabor wavelet for example and figured out the length of the frequency border of the Heisenberg box for each "daughter wavelet". Therefore they got the theory formula of the decision of the scale factor for the Gabor wavelet as $a = 1.15^n a_0$. The theory and the accuracy check by a simulation and an example of 3-D shape measurement are explained and shown in this paper. And the results of the simulation and experiments have shown the advantage of the presented method.

Keywords wavelet transform, discrete grid, scale, Gabor analytic wavelet

1 引言

被誉为分析信号的显微镜的小波分析^[1~4]是一

种空域-频域局部化分析方法, 其不仅具有多分辨率分析的特点, 而且在空域-频域两域都具有表征信号局部特征的能力, 近年来其在语音、图像、通信、雷达、水声、地震、生物医学、机械振动、化工分析等领

基金项目: 广东省自然科学基金项目(010377)

收稿日期: 2005-07-06 改回日期: 2005-09-26

第一作者简介: 翁嘉文(1979~), 女, 助教。2001年获暨南大学理工学院硕士学位。主要从事 3 维形貌测量研究工作。E-mail: weng-jw

@163.com。通讯作者: 钟金钢, 男, 教授。E-mail: tzjg@jnu.edu.cn

域都得到了广泛的应用,已成为了众多学科关注的热点。在实际工程应用中必须对连续小波变换进行离散化处理,在尺度方向上目前通行的方法是对尺度参数 a 按以 2 为底的幂级数做离散化来得到离散栅格^[5]下的小波变换,但实际工作时,往往需要加大尺度方向的栅格密度,以获得细致的分析。由于现行的增加密度方法都具有一定的任意性,如根据八音阶情况增加密度,就没有实际考虑小波基的空频-时频能量分布特性,本文通过对小波变换轮廓术的研究,根据小波基的能量特性,提出了尺度参数取值的理论方法,并以 3 维形貌测量为例,给出了 Gabor 解析小波^[3,6,7]尺度参数取值的理论公式以及计算机模拟和实验结果。

2 理论

2.1 离散栅格小波变换

1 维空间载频条纹信号 $s(x)$ 的连续小波变换定义为

$$W_s(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} s(x) \psi_{a,b}^*(x) dx = s(x) \psi_{a,b}(x) \quad (1)$$

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{a} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad (2)$$

其中“*”表示共轭, $\psi_{a,b}(x)$ 是母小波函数 $\psi(x)$ 经伸缩平移后得到的小波序列, a 是尺度参数,其作用是将母小波函数 $\psi(x)$ 做伸缩, a 愈大, $\psi(x/a)$ 愈宽,反之亦然, b 是平移因子。

但连续小波变换在实际工程应用中必须进行离散化处理。在尺度方向上,对尺度参数 a 按以 2 为底的幂级数做离散化即可得到离散栅格小波变换的一系列尺度参数值,即

$$a = a_0^n \quad (a_0 = 2, n = 0, 1, \dots, N) \quad (3)$$

其中 N 为小波序列的总数。从具体计算方法上看,离散栅格上的小波变换与连续小波变换的数值积分并无区别,只是尺度参数 a 按 2 的幂级数增长进行离散取值,即实现二进制离散栅格上的小波变换。在实际工作中,例如 3 维形貌测量分析,若以 $a_0 = 2$ 作基,则由于逐次二分频太过于粗糙,因此需要加大尺度方向的栅格密度,也就是尺度变化不是以 2 为基,而是比 2 更密的基,即 $1 < a_0 < 2$,以获取细致的分析信息。一般的方法是令

$$a = 2^{n-\frac{m}{M}}, m = 0, 1, \dots, M-1 \quad (4)$$

使尺度方向的栅格增加密度^[5,8],例如八音阶情况, $M = 8$ 。该方法虽在一定程度上增加了尺度的密度,但不具有完整的理论依据,且存在着一定的任意性,因此难于避免各小波基之间的频谱拉距或混叠现象,以致造成测量误差。

2.2 小波变换尺度参数的理论取值

在空域中,小波 $\psi_{a,b}(x)$ 集中在以平移因子 b 为中心、宽度与尺度参数 a 成正比的区域内,其傅里叶变换为

$$\tilde{\psi}_{a,b}(\omega) = e^{-j\omega b} \sqrt{a} \tilde{\psi}(a\omega) \quad (5)$$

其中 $\tilde{\psi}$ 是 ψ 的傅里叶变换。在频域中 $\tilde{\psi}_{a,b}(\omega)$ 集中在以 η/a 为中心,宽度与 $1/a$ 成正比的区域内。总而言之,在空间-频率平面上,小波空频原子 $\psi_{a,b}(x)$ 的能量宽度对应于一个 Heisenberg 盒(如图 1 所示)该盒的中心在 $(b, \eta/a)$,而且频率边长为

$$\frac{\sigma_\omega^2}{a^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left(\omega - \frac{\eta}{a}\right)^2 |\tilde{\psi}_{a,b}(\omega)|^2 d\omega \quad (6)$$

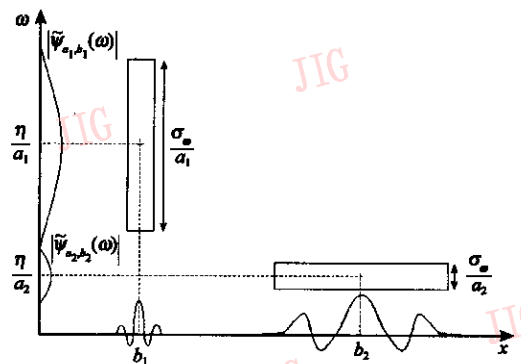


图 1 小波 $\psi_{a,b}(x)$ 和 $\tilde{\psi}_{a,b}(\omega)$ 的空频盒

Fig. 1 Heisenberg box of $\psi_{a,b}(x)$ & $\tilde{\psi}_{a,b}(\omega)$

对于 Gabor 解析小波,其空间响应函数 $\psi(x)$ 和频率响应函数 $\psi(\omega)$ 分别为

$$\begin{cases} \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma}} \exp\left[-\frac{(2\pi/\gamma)^2 x^2}{2} + j2\pi x\right] \\ \psi(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\gamma/2\pi)^2 (\omega - 2\pi)^2}{2}\right] \end{cases} \quad (7)$$

其中 $\gamma = \pi \sqrt{2/\ln 2}$, j 是虚部的单位,其对应的中心角频率 η 为

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \omega |\psi(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \quad (8)$$

由于小波族 $\psi_{a,b}(x)$ 各尺度小波的中心角频率为 $\omega = \eta/a = 2\pi/a$,即中心频率为

$$f_{WT} = \omega/2\pi = 1/a \quad (9)$$

因此,对于 Gabor 解析小波,小波空频原子 $\psi_{a,b}(x)$ 的 Heisenberg 盒频率边长为

$$\frac{\sigma_\omega}{a} \approx 0.136692 \times \frac{2\pi}{a} \quad (10)$$

即有

$$\frac{\sigma_f}{a} = \frac{\sigma_\omega}{2\pi a} \approx \frac{0.136692}{a} \quad (11)$$

其中 σ_f 为频率展宽。

根据式(9)就可以确定 Heisenberg 盒在频率轴上的范围,即频率窗宽度为 $\left[\frac{1}{a} - \frac{\sigma_f}{2a}, \frac{1}{a} + \frac{\sigma_f}{2a}\right]$ 。将式

(11)代入此范围,即可以得到 $\left[\frac{0.931654}{a}, \frac{1.068346}{a}\right]$ 。

显而易见,当小波分析的尺度跨度太大时,频率窗会出现拉距现象;而当小波分析的尺度跨度过小时,则会出现频谱混叠的情况。在 3 维形貌测量中,各尺度小波之间这种频谱拉距或混叠现象是造成测量误差的一个主要原因。为了避免上述情况的出现,现设想各尺度小波的对应该频率窗紧密排列,以利于考察两相邻尺度参数值之间的关系。假设两相邻尺度参数值为 a_1 和 a_2 ($a_2 > a_1$) 其对应尺度小波的中心频率为 f_{WT1} 和 f_{WT2} ($f_{WT2} < f_{WT1}$)。由于当 f_{WT2} 对应的频率窗上界与 f_{WT1} 对应的频率窗下界重叠时,两频率窗刚好分离,即

$$\frac{1.068346}{a_2} = \frac{0.931654}{a_1} \Rightarrow a_2 = \frac{1.068346}{0.931654} a_1 \approx 1.15 a_1 \quad (12)$$

因此整理得尺度参数 a 离散化理论取值公式为

$$a = 1.15^n a_0 \quad (a_0 = 2, n = 0, 1, \dots, N) \quad (13)$$

3 计算机模拟

以 3 维形貌测量中的小波变换轮廓术^[6,7,9]为例来进行计算机模拟。通过计算机生成空间周期为 16pixels,大小为 1×512 pixels 的 1 维基准正弦光栅图像(如图 2(a)所示),并加入一连续相位调制 $u(x)$,其中 $L = 512$,得到一变形光栅图像(如图 2(b)所示)。

$$u(x) = 50 \times \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{L}\right) \times \frac{2\pi}{16} \quad (x = 0, 1, \dots, 511) \quad (14)$$

通过对尺度参数 a 按以 2 为底的幂级数做离散化来对变形光栅图像进行离散栅格下的小波变换,即在式(3)中取 $a_0 = 2, N = 6$ 来得到如图 3 所示的幅值分布。从图 3 中可见,各个尺度下的小波基对



(a) 基准光栅



(b) 变形光栅

图 2 基准光栅与变形光栅

Fig. 2 Original grating pattern and deformed grating pattern

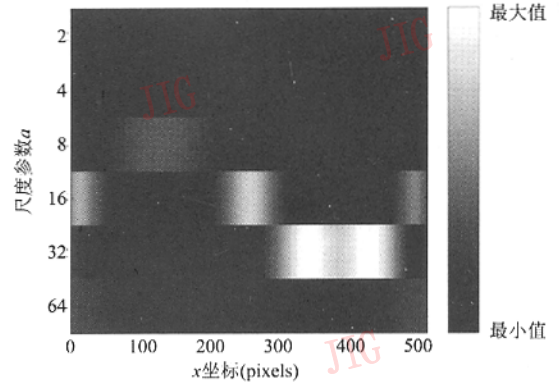


图 3 变形光栅小波变换幅值分布($a = 2^n$)

Fig. 3 Amplitude of the WT components of the deformed grating pattern ($a = 2^n$)

应的小波变换幅值出现了严重的拉距现象,因此要从该尺度分布下确定小波变换脊变得十分困难,因而在相位的提取中将引入极大的误差。

根据 Gabor 解析小波序列能量分布特性来选择尺度参数值,即在式(13)中取 $a_0 = 2, N = 25$,加大尺度方向的栅格密度进行小波变换,得到如图 4、图 5

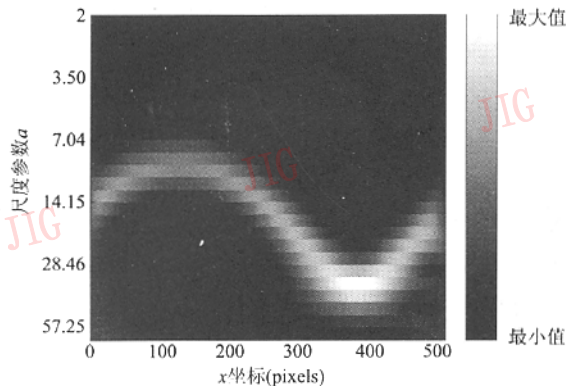


图 4 变形光栅小波变换幅值分布($a = 2 \times 1.15^n$)

Fig. 4 Amplitude of the WT components of the deformed grating pattern ($a = 2 \times 1.15^n$)

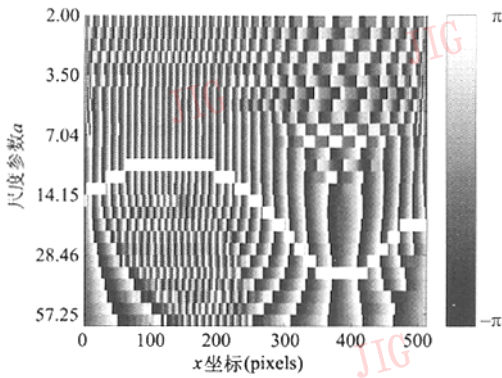


图 5 变形光栅小波变换相位分布($a = 2 \times 1.15^n$)
 Fig. 5 Phase of the WT components of the deformed grating pattern ($a = 2 \times 1.15^n$)

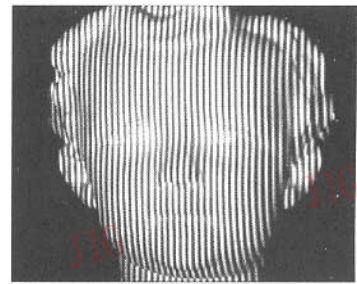


图 7 变形光栅图像
 Fig. 7 Deformed grating pattern

所示的幅值分布和相位分布。从图 4 可见,经过尺度参数 a 离散化理论取值公式增加密度后的栅格小波变换,明显地改善了之前的拉距现象。图 5 中以白线标记了小波变换脊曲线。通过计算机自动检测基准光栅和变形光栅的小波变换脊来提取其对应的相位值,将其相减后,再进行解包络,其得到的调制相位分布 $\Delta\varphi$ (如图 6 所示)。可见,经上述方法增加小波基密度后可以很好地提取 $\Delta\varphi$,并可得到令人满意的结果。

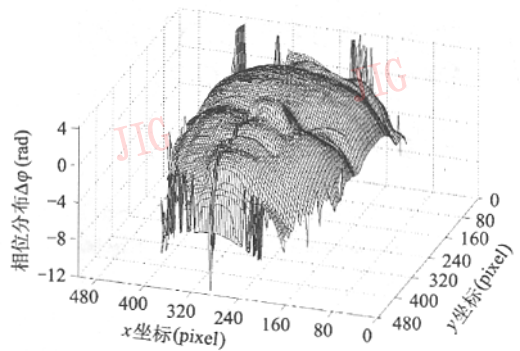


图 8 小波分析得到的调制相位分布($a = 2^n$)
 Fig. 8 Modulated phase analyzed by WT ($a = 2^n$)

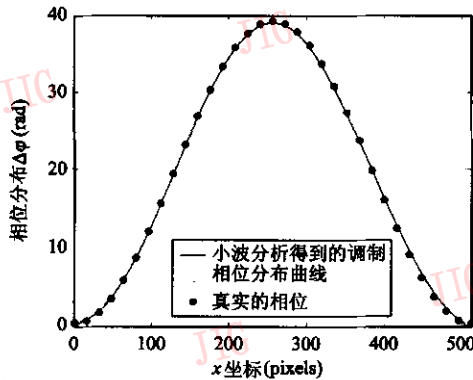


图 6 小波变换分析得到的调制相位分布 $\Delta\varphi$
 Fig. 6 Modulated phase $\Delta\varphi$ analyzed by WT grating Pattern ($a = 2 \times 1.15^n$)

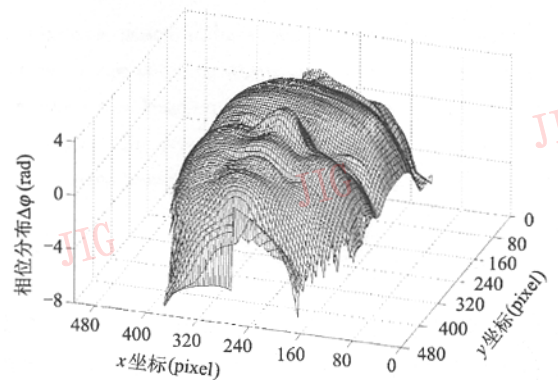


图 9 小波变换分析得到的调制相位分布($a = 2 \times 1.15^n$)
 Fig. 9 Modulated phase analyzed by WT ($a = 2 \times 1.15^n$)

4 实验

为验证本文方法的效果,以 3 维形貌测量为例对本文方法进行了实验,实验采用交叉光轴几何光学系统。图 7 为实验将要处理的小人头像经相位调制的变形条纹光栅图像,尺寸为 480×512 pixels。

图 8、图 9 分别为尺度参数 a 按 $a = 2^n$ 做离散化和按 $a = 2 \times 1.15^n$ 做离散化小波变换分析后得到的调制相位分布。显而易见,应用本文提出的方法,在尺度方向上通过加大栅格小波密度可以很好地解决各个小波基频率窗的拉距现象以及频谱混叠的情况。比较图 8 与图 9 中小人嘴巴以及鼻子部分的相位调制分析结果可见,通过合理地增加尺度密度可提高小波变换的测量精度。

5 结 论

本文根据小波基的能量特性指出,各尺度小波之间的频谱拉距或混叠现象是离散栅格小波变换产生误差的一个主要原因,并且提出了尺度参数取值的理论方法,从而弥补了以往尺度栅格增加密度的任意性问题。文中还以 3 维形貌测量的小波变换轮廓术为例,给出了 Gabor 解析小波尺度参数取值的理论公式 $a = 1.15^n a_0$ ($a_0 = 2$, $n = 0, 1, \dots, N$), 由计算机模拟和实验结果分析可见,通过合理地增加尺度密度可提高小波变换的测量精度。

参考文献 (References)

- 1 Casasent David P, Smokelin John-Scott, Ye Anqi. Wavelet and Gabor transforms for detection[J]. Optical Engineering, 1992, **31**(9): 1893 ~ 1898.
- 2 Chang Rong-seng, Sheu Jin-yi, Lin Ching-huang, *et al.* Analysis of CCD moiré pattern for micro-range measurements using the wavelet transform[J]. Optics and Laser Technology, 2003, **35**: 43 ~ 47.
- 3 Jeong H. Analysis of plate wave propagation in anisotropic laminates using a wavelet transform[J]. NDT&E International, 2001, **34**: 185 ~ 190.
- 4 Telfer Brian, Szu Harold H. New wavelet transform normalization to remove frequency bias[J]. Optical Engineering, 1992, **31**(9): 1830 ~ 1834.
- 5 Cesar A, Kim Tae-eui. Determination of strains from fringe patterns using space-frequency representations[J]. Optical Engineering, 2003, **42**(11): 3128 ~ 3193.
- 6 Weng Jia-wen, Zhong Jin-gang. Apply wavelet transform to phase analysis of spatial carrier-fringe patterns[J]. Acta Optica Sinica, 2005, **25**(4): 454 ~ 459. [翁嘉文, 钟金钢. 小波变换在载频条纹相位分析法中的应用研究[J]. 光学学报, 2005, **25**(4): 454 ~ 459.]
- 7 Zhong Jin-gang, Weng Jia-wen. Spatial carrier-fringe pattern analysis by means of wavelet transform: wavelet transform profilometry[J]. Applied Optics, 2004, **43**(26): 4993 ~ 4998.
- 8 Rioul O. Fast algorithm for discrete and continuous wavelet transform algorithm[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1993, **38**(2): 569 ~ 586.
- 9 Weng Jia-wen, Zhong Jin-gang. Application of wavelet filter to profilometry[J]. Journal of Jinan University(Natural Science), 2004, **25**(5): 601 ~ 606. [翁嘉文, 钟金钢. 小波滤波器组在轮廓术上的应用[J]. 暨南大学学报(自然科学版), 2004, **25**(5): 601 ~ 606.]